上一次：行秩=列秩

列变换不改变行秩.(行变换不改变列秩)

列秩　　　　　　　　　　行秩

$$A \xrightarrow{\text{行变换}} \underbrace{\mathrm{rref}(A)} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & & & & & 1 & * & * & * & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & 1 \\ 0 & & 0 & & & & & & & \end{bmatrix}$$

列变换 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & \end{bmatrix} = \bar{A}$

$\bar{A}$　　$\bar{A}^T$　　rref.

定义：如上矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & 0 \\ & 0 & & \end{bmatrix}$ 称为A的相抵标准型.

性质：A　$m\times n$，存在 $P\in M_{m\times m}$, $Q\in M_{n\times n}$

$P.Q$ 均可逆，使得 $PAQ = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

A的相抵标准型

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ \hline & 0 & \end{array}\right]$$

定义：$A, B \in M_{m\times n}$. A, B 相抵是指存在 $P\in M_{m\times m}$, $Q\in M_{n\times n}$, P, Q 可逆，$PAQ=B$

性质：$A, B \in M_{m\times n}$. A, B 相抵当且仅当 $rk(A)=rk(B)$.

证明："当" $rk(A)=rk(B)$，则 A, B 有相同的相抵标准型，存在 P_1, Q_1, P_2, Q_2 可逆

$$P_1 A Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} = P_2 B Q_2$$

$$\Rightarrow (P_2^{-1}P_1) A (Q_1 Q_2^{-1}) = B$$

"仅当"：

$\mathbb{R}^n$ 中的子空间.（行空间，列空间，更进一步理解行秩=列秩）.

A $m\times n$ $\quad x\in\mathbb{R}^n$.

$Ax=0$ 解集满足

① 加法封闭 closed under addition.

② 数乘封闭 closed under scalar multiplication.

定义：将满足①，②的 $\mathbb{R}^n$ 中的非空子集 W 称为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间

例子: 0子空间. $\{0\}$ 只包含0向量.

性质: 任一 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 W 均包含 0向量.

证明: $0 \in \mathbb{R}$, $\underset{\uparrow\ \text{实数}}{0} \cdot \underset{\uparrow\ W\text{中的向量}}{v} = 0 \leftarrow$ 0向量.

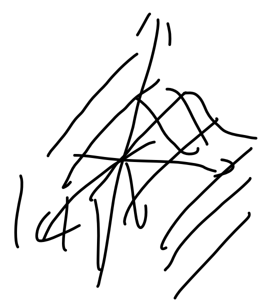
0子空间是最小的子空间.
包含关系下

一. kernel (零空间) 定义: A $m \times n$.

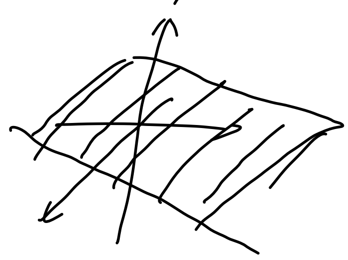
$$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \subset \mathbb{R}^n$$

例子. A 3×3

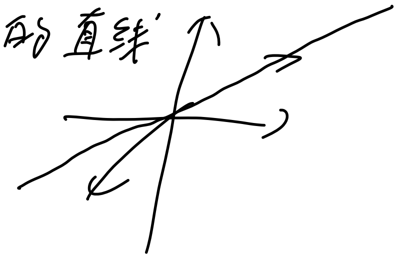
$rk(A) = 0$, $\ker A = \mathbb{R}^3$



$rk(A) = 1$, $\ker A =$ 通过原点的平面.



$rk(A) = 2$, $\ker A =$ 通过原点的直线



$rk(A) = 3$, $\ker A = \{0\}$

二、Span（张成，线性生成）

定义：$v_1, \cdots, v_s \in \mathbb{R}^n$.（$v_1 \cdots v_s$ 可重复）

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_s) = \{\text{linear combinations of } v_1 \cdots v_s\}$$
$$= \{x_1 v_1 + \cdots + x_s v_s \mid x_i \in \mathbb{R}\}.$$

验证：$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_s)$ 满足子空间的 ①. ②，

是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

Span 与 linear system $Ax=b$.

A $m \times n$. $A = [v_1 \cdots v_n]$ $v_i \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^m$

$Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow$ $b \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_n)$

也称 $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_n)$ 是 A 的列空间 (column space)

（有时记作 $C(A)$） $C(A) \subset \mathbb{R}^m$.

同样可定义 A 的行空间.（row space）$\subset \mathbb{R}^n$.

也可以定无穷多个向量的 span. $\{v_i\}_{i \in I}$. I 指标集
$v_i \in \mathbb{R}^n$. 下标集

$$\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{v_i\}_{i \in I} = \{\underbrace{x_{i_1} v_{i_1} + \cdots + x_{i_k} v_{i_k}}_{\text{所有有限和.}} \mid x_{i_1}, \cdots, x_{i_k} \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ i_1, \cdots, i_k \in I\}.$$

/

(无穷和不包含在内. 为什么? 没定义.
通过"+", "·" => 有限个的线性组合)

两种产生子空间的方式. kernel, span.

联系:

ker $\underline{Ax=0}$ 解的结构 $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ 自由元

$x_{j_a} \cdots$ 主元.

x_{j_a} = "linear combination" of $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$

解: $x = x_{i_1} \overset{v_1}{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}} + x_{i_2} \overset{v_2}{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}} + \cdots + x_{i_k} \overset{v_k}{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}}$

第 i_1 个位置是 1.
$i_2, \cdots i_k$ 是 0.

$\boxed{A \quad m \times n}$

$\ker A = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} (v_1 \cdots v_k) \qquad k = n - rk(A)$

反之, 是否 $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \underline{(v_1 \cdots v_k)} = \ker A$ for some A?

任取 $\underline{v_1 \cdots v_k \in \mathbb{R}^m}$

例子: $\mathbb{R}^3$. $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}}_{v_2}\right)$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$ 对 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 有解.

$$\Leftrightarrow \mathrm{rk}\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix}1 & 4 & x_1\\2 & 5 & x_2\\3 & 6 & x_3\end{pmatrix}$$

row reduction $\begin{pmatrix}1 & 4 & x_1\\2 & 5 & x_2\\3 & 6 & x_3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 4 & x_1\\0 & -3 & x_2-2x_1\\0 & -6 & x_3-3x_1\end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 4 & x_1\\0 & -3 & x_2-2x_1\\0 & 0 & x_3-2x_2+x_1\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ $x_3 - 2x_2 + x_1 = 0$

$A = [1, -2, 1]$. $\ker A = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$

性质：行变换不改变 A 的行空间.

证明：$A=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$. A 作行变换 $\tilde{A}=\begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_m \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\tilde{v}_1, \cdots \tilde{v}_m$ 都是 $v_1 \cdots v_m$ 的 linear combination.

$\Rightarrow$ $\tilde{v}_i \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_m)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\tilde{v}_1, \cdots \tilde{v}_m) \subset \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_m)$

反之，由行变换可逆，$\Rightarrow$ $\supset$.

例子：$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}\right) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}}\right)$

因为 $v_3 = 2v_2 - v_1$,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3(2v_2 - v_1) = (a_1 - a_3)v_1 + (a_2 + 2a_3)v_2$$

v_3 是多余的 (redundant)

$\boxed{\text{寻找“最经济”极小的生成元组以及 Span 中 linear combination 的系数唯一性（线性表出的唯一性）}}$

定义（线性无关） $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^m$.

如果 0 表示为 $v_1 \cdots v_n$ 的线性组合的方式

$0 = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ 只有组合系数 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$

则称 $v_1 \cdots v_n$ 线性无关 （或者称 0 只有平凡的线性表出）

（线性相关） 0 有非平凡 (non trivial) 的线性表出，

则存在 $a_1 \cdots a_n$ 不全为 0，使得

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$.

例子： $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}_{v_2}$ 线性无关

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ 线性相关.

证明： $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 有唯一解

$\Leftrightarrow \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 2$

一般的.

线性无关

定理: $v_1 \cdots v_n \in \mathbb{R}^m$ linearly independent

$\Leftrightarrow \quad rk(v_1 \cdots v_n) = n$

也称作 $A = [v_1 \cdots v_n]$ 是列满秩.

推论: $\mathbb{R}^m$ 中 k 个向量 在 $k > m$ 时 一定线性相关

$A = [v_1 \cdots v_n]$ $\quad v_1 \cdots v_n$ 线性相关无关与 $AX=0$ 是否有非零解有关.

换言之.

定理: 对 A 作行变换不改变 $v_1 \cdots v_n$ 或者某一子向量组的线性关系, (线性相关或无关, 以及相关时 0 的线性表出)

注意: 行变换会改变 $\underbrace{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_1, \cdots v_n)}_{\text{列空间}}$, 试举例说明.

定理: $v_1 \cdots v_n$ 线性无关, 则 $v \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_n)$

v 写成 $v_1 \cdots v_n$ 的线性组合式子的系数由 v 唯一确定.

证明: $\quad v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$

$\quad\quad = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$

$$(a_1-b_1)v_1+\cdots+(a_n-b_n)v_n=0$$

由 $v_1\cdots v_n$ 线性无关，$a_1-b_1=0=a_2-b_2=\cdots a_n-b_n$

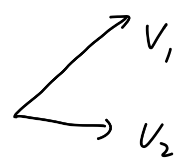
$a_i=b_i$.

另一个观点，Span 来检测 linearly independent.

例子：$n=1$, v_1 线性无关 $\Leftrightarrow$ $v_1\neq 0$

$n=2$, v_1, v_2 线性无关 $\Leftrightarrow$ $v_1\neq 0$

且 $v_2\neq cv_1$, $\forall c\in\mathbb{R}$



$n=3$, v_1, v_2, v_3 线性无关 $\Leftrightarrow$ $v_1\neq 0$

$v_2\neq cv_1$, $\forall c\in\mathbb{R}$

$v_3\notin \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_1,v_2)$

$a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=0$ 非平凡表达.

若 $a_3\neq 0$, $\Rightarrow$ $v_3=-a_3^{-1}(a_1v_1+a_2v_2)$

$=(-a_3^{-1}a_1)v_1+(-a_3^{-1}a_2)v_2$

若 $a_3=0$, $a_2\neq 0$, $\Rightarrow$ $v_2=(-a_2^{-1}a_1)v_1$

若 $a_3=0$, $a_2=0$, $a_1\neq 0$, $\Rightarrow$ $v_1=0$.

有用的定理：

定理：$V_1 \cdots V_n$ 线性无关，

则 $V_1 \cdots V_n, V_{n+1}$ 线性相关 等价于 $V_{n+1} \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(V_1 \cdots V_n)$

证明："$\Rightarrow$" $a_1V_1 + \cdots + a_{n+1}V_{n+1} = 0$，$a_1 \cdots a_{n+1}$ 不全为0.

$\Rightarrow a_{n+1} \neq 0$，否则 $\begin{cases} a_1V_1 + \cdots + a_nV_n = 0 \\ a_1 \cdots a_n \text{ 不全为0}. \end{cases}$

与 $V_1 \cdots V_n$ 线性无关矛盾.

$V_{n+1} = (-a_{n+1}^{-1}a_1)V_1 + \cdots + (-a_{n+1}^{-1}a_n)V_n \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(V_1 \cdots V_n)$

"$\Leftarrow$"

极大线性无关组.

定义：$V_1 \cdots V_n \in \mathbb{R}^m$，称 $V_{i_1} \cdots V_{i_k}$ 是极大线性无关组

如果 ① 线性无关

（在包含关系下极大）② $\forall i_{k+1} \in \{1, \cdots n\} \setminus \{i_1, \cdots i_k\}$.

$V_{i_1} \cdots V_{i_k}, V_{i_{k+1}}$ 线性相关.

定理：$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(V_1 \cdots V_n) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(V_{i_1}, V_{i_2} \cdots V_{i_k})$

证明：$V_{i_{k+1}} \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(V_{i_1} \cdots V_{i_k})$

$\Rightarrow$ ✓

存在性:

定理: $V_1 \cdots V_n$ 不全为0, 则一定存在极大线性无关组.

证明: 一种方法: "$\underline{最大}$ $\Rightarrow$ $\underline{极大}$"

数目　　包含关系下的 ✓

取 $\{k = V_1, \cdots V_n$ 中线性无关的向量组中向量的个数$\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 非空, 有最大值.

另一种方法: 假设 $V_1 \neq 0$, 依次考察

V_1, V_2 相关, 则剔除 V_2. 无关, 则保留 V_2

V_1, V_2, V_3, 相关, $\cdots$ V_3, 无关, V_3.

$\vdots$

得到 $V_{i_1}, \cdots, V_{i_k}$, 验证线性无关, 极大

问题: 作线性无关组的"极大"是否也是绝对数目的最大.

定理: $V_{i_1} \cdots V_{i_k}$ 是 $V_1 \cdots V_n$ 极大线性无关组, 则任意 $V_{j_1} \cdots V_{j_l}$, 若 $l > k$, 则 $V_{j_1} \cdots V_{j_l}$ 线性相关.

问题: 无穷多个 $\{v_i\}_{i\in I}$. 怎么定义极大线性无关组?